

В [1] зокрема вивчаються розклади повних графів на зв'язні регулярні графи. Можливо, знадобиться перевірка на ізоморфізм компонент розкладу, які є графами з (H_t) . Наприклад, граф H_4 порядку 9 самодоповняльний, тобто, K_9 розкладається на дві компоненти, ізоморфні графу H_4 .

ПОСИЛАННЯ

- [1] Донец Г.А., Петренюк А. Я.(2009). Экстремальные покрытия графов. Кіровоград, «Комбінаторні конфігурації».
- [2] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. (1990). *Лекции по теории графов*. М., «Наука».
- [3] Шевченко К. М.(2011). Побудова ізоморфізмів деяких 4-регулярних гамільтоново розкладних графів, *Матеріали 11-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 15-16 квітня 2011 р., Кіровоград*, 194-198.

УДК 512.552.1

НЕТЕРОВІ НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ДИСТРИБУТИВНО МОДУЛЬНОГО ТИПУ.

Ю. В. ЯРЕМЕНКО, О. О. ШЕСТЕРНІНА

Описаны миноры второго и третьего порядка нетеровых полусовершенных колец дистрибутивно модульного типа.

The minors of orders 2 and 3 of noetherian semi-perfect rings of distributive module type are described.

Розглядаються асоціативні кільця з $1 \neq 0$.

Модуль M називається *дистрибутивним*, якщо $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$ для будь-яких підмодулів K, L, N .

Модуль називається *напівдистрибутивним*, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів.

Кільце називається *напівдистрибутивним справа (зліва)* якщо воно є правим (лівим) модулем над собою.

Кільце, яке напівдистрибутивне справа і зліва називають *напівдистрибутивним*.

Модуль M називається *скінчено зображуваним*, якщо існує точна послідовність $P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$, де P_1 і P_0 скінченороджені модулі.

Кільце A з радикалом Джекобсона R називається *напівдосконалим*, якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала R [1].

Напівдосконале кільце A називається *кільцем дистрибутивно модульного типу*, якщо довільний правий скінчено зображуваний A -модуль напівдистрибутивний, тобто пряма сума дистрибутивних модулів.

Важливим прикладом кілець дистрибутивно модульного типу являються напівланцюгові кільця.

Отже, для того, щоб показати скінчену зображуваність модуля M над напівдосконалим кільцем, потрібно перевірити скінченородженість модуля M і скінченородженість модуля $\text{Ker}\Pi$, де Π – епіморфізм проєктивного накриття $P(M)$ модуля M на M . Скористаємося методом Ауслендера [2]:

Лема 1. Якщо $P \xrightarrow{\Pi} P_0 \xrightarrow{\Pi_0} M \longrightarrow 0$ і $Q \xrightarrow{f} Q_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$ – точні послідовності, де Q_0 і P_0 проєктивні накриття модуля M , а P_1 і Q_1 проєктивні накриття $\text{Ker}\Pi_0$ і $\text{Ker}f_0$ відповідно, то існує комутативна діаграма

$$P \xrightarrow{\Pi} P_0 \xrightarrow{\Pi_0} M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \varphi \quad \downarrow \varphi_0 \quad \downarrow 1_M$$

$$Q \xrightarrow{f} Q_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0, \quad \text{в якій } \varphi \text{ і } \varphi_0 \text{ – ізоморфізми.}$$

Д о в е д е н н я. За означенням проєктивного модуля існує гомоморфізм φ_0 такий, що $\Pi_0 = f_0 \varphi_0$. Покажемо, що φ_0 – ізоморфізм. Для довільного $g_0 \in Q_0$ існує елемент $p_0 \in P_0$ такий, що $f_0(g_0) = \Pi_0(p_0)$. Так як $g_0 = g_0 -$

$\varphi_0(p_0) + \varphi_0(p_0)$, де $g_0 - \varphi_0(p_0) \in \text{Ker} f_0$, то $Q_0 = \text{Im } \varphi_0 + \text{Ker } \varphi_0$. За властивістю проєктивного накриття $\text{Ker} f_0 \subset Q_0 R$, де R – радикал Джекобсона кільця A . За лемою Накаями $\text{Im } \varphi_0 = Q_0$. Тому $p_0 \cong \text{Im } \varphi_0 \oplus \text{Ker } \varphi_0$, і в силу єдиності проєктивного накриття $\text{Ker } \varphi_0 = 0$, тобто φ_0 – ізоморфізм. Позначимо $Y = \text{Ker} f_0$. Тоді $\text{Im } \varphi_0 \Pi = Y$. Так як $\text{Im } f = Y$, то за означенням проєктивного модуля існує гомоморфізм $\varphi: P \rightarrow Q$ такий, що $\varphi_0 \Pi = f \varphi$. Застосовуючи міркування, наведені вище, до модуля Y і враховуючи, що Q – проєктивне накриття Y , отримаємо, що φ – ізоморфізм. Лему доведено.

Нехай P і P_0 – скінченороджені проєктивні A -модулі і $\Pi: P \rightarrow P_0$ такий гомоморфізм, що $\text{Im } \Pi \subset P_0 R$ і $\text{Ker } \Pi \subset P R$. Очевидно, що модуль $M_\Pi = P_0 / \text{Im } \Pi$ є скінчено зображуваним модулем, причому P_0 – проєктивне накриття модуля M_Π , а P – проєктивне накриття модуля $\text{Im } \Pi$. Якщо $\varphi_1: P \rightarrow Q$ і $\varphi_0: P_0 \rightarrow Q_0$ – ізоморфізми, то ясно, що $M_{\varphi_0 \Pi \varphi_1^{-1}} \cong M_\Pi$. Навпаки, якщо $\Pi: P \rightarrow P_0$ – гомоморфізм, вказаний вище, а $f: Q \rightarrow Q_0$ – такий гомоморфізм, що $\text{Im } f = Q_0 R$, $\text{Ker } f \subset Q R$ і $M_\Pi \cong M_f$, то $f = \varphi_0 \Pi \varphi_1^{-1}$.

Довільний скінченороджений проєктивний модуль над напівдосконалим кільцем A однозначно розкладається в пряму суму головних. Нехай P і P_0 скінченороджені проєктивні A -модулі, $P = P_1^{k_1} \oplus \dots \oplus P_s^{k_s}$ і $P_0 = P_1^{m_1} \oplus \dots \oplus P_s^{m_s}$ – їх розклад в пряму суму головних A – модулів, $\Pi: P \rightarrow P_0$ – гомоморфізм.

Гомоморфізм Π записується у вигляді матриці $[\Pi]$ з елементами із $\text{Hom}_A(P_j^{k_j}, P_i^{m_i})$ ($i, j = 1, \dots, s$), де кожний конкретний $\text{Hom}_A(P_j^{k_j}, P_i^{m_i})$ в свою чергу є матрицею розмірності $m_i \times k_j$ з елементами із $\text{Hom}_A(P_j, P_i)$. Нехай e_1, \dots, e_s – попарно ортогональні локальні ідемпотенти із розкладу $1 \in A$. Тоді $P_i \cong e_i A$ ($i = 1, \dots, s$) і $\text{Hom}_A(P_j, P_i) \cong e_i A e_j$. Отже, можна вважати, що $[\Pi]$ являється клітинною матрицею з елементами із $e_i A e_j$ ($i, j = 1, \dots, s$). Розділимо матрицю

$[P]$ (переставляючи в разі необхідності рядки і стовпці) на s горизонтальних і s вертикальних смуг так, щоб в клітині на перетині i -ї горизонтальної смуги і j -тої вертикальної смуги стояли елементи із $e_i A e_j$.

Вияснимо, яким умовам повинна задовольняти матриця $[P]$, щоб $P_0 = P(M_\Pi)$, а $P = P(Im \Pi)$. Із того, що $P_0 = P(M_\Pi)$, випливає, що Π є клітинною матрицею з елементами із $e_i R e_j$ ($i, j = 1, \dots, s$).

Так як модулі P_1, \dots, P_s – попарно неізоморфні, то $e_i R e_j = e_i A e_j$ ($i \neq j$). Так як нам відомо $Im \Pi$, то можна вважати, що $P = P(Im \Pi)$. Фактично, це зводиться до того, що із матриці $[P]$ викидаються деякі стовпці.

Якщо скінчено зображуваний модуль M розкладний і $M = M_1 \oplus M_2$, тоді $P_0 = P(M_1) \oplus P(M_2)$ і $M = P(M_1)/X_1 \oplus P(M_2)/X_2$, де $Ker \Pi_0 = X_1 \oplus X_2$. Отже, $Im \Pi = X_1 \oplus X_2$ і $P(Im \Pi) = P(X_1) \oplus P(X_2)$, звідки і випливає, що матриця Π має клітинно-діагональний вигляд.

Лема 2. *Скінчено зображуваний модуль $M = M_\psi$ розкладний тоді і тільки тоді, коли для гомоморфізма $\psi: Q \rightarrow P$ скінченопороджених проєктивних модулів такого, що $Im \psi \subset PR$ і Q – проєктивне накриття $Im \psi$, існують автоморфізми α і β модулів Q і P такі, що $[\beta \psi \alpha]$ клітинно-діагональна матриця.*

Д о в е д е н н я. Нехай існують автоморфізми α і β модулів Q і P такі, що $[\beta \psi \alpha]$ клітинно-діагональна матриця. Тоді $M_\psi \cong M_{\beta \psi \alpha}$ і так як гомоморфізм $\beta \psi \alpha: Q \rightarrow P$ задовольняє ті ж умови, що й ψ , то очевидно, що модуль $M_{\beta \psi \alpha}$ розкладний у відповідності з розкладом матриці $[\beta \psi \alpha]$.

Нехай модуль M розкладний. Розглянемо комутативну діаграму:

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\psi} & P & \xrightarrow{\vartheta} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow 1_M & & \\ P(X_1) \oplus P(X_2) & \xrightarrow{\pi} & P(M_1) \oplus P(M_2) & \xrightarrow{\tau} & M_1 \oplus M_2 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

Зафіксуємо ізоморфізми $\alpha_0 : Q \rightarrow P(X_1) \oplus P(X_2)$ і $\beta_0 : P \rightarrow P(M_1) \oplus P(M_2)$.

Покладемо $Q_i = \alpha_0^{-1} P(X_i)$ і $P'_i = \beta_0^{-1} P(M_i)$ ($i=1,2$). Так як $P = \beta \psi \alpha^{-1}$, маємо $\beta_0^{-1} P \alpha_0 = \beta_0^{-1} \beta \psi \alpha^{-1} \alpha_0$, де $\alpha^{-1} \alpha_0$ і $\beta_0^{-1} \beta$ – автоморфізми модулів Q і P , причому ясно, що гомоморфізм

$$\beta_0^{-1} \beta \psi \alpha^{-1} \alpha_0 : Q_1 \oplus Q_2 \rightarrow P'_1 \oplus P'_2 \text{ клітинно-діагональний.}$$

Із лем 1 і 2 випливає теорема.

Теорема 1. *Нехай A кільце дистрибутивно модульного типу $e^2 = e \in A$.*

Тоді кільце eAe також є кільцем дистрибутивно модульного типу.

Нехай A – напівдосконале кільце дистрибутивно модульного типу ,

$I = e_1 + \dots + e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_i A e_j$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Теорема 2 [3]. *Нехай A – напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце. Тоді A_{ij} є лівим ланцюговим A_{ii} – модулем і правим ланцюговим A_{jj} – модулем ($i, j = 1, \dots, n$).*

Наслідок 1. *Напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце – напівдистрибутивне.*

Твердження 1 [4]. *Локальне дистрибутивно модульного типу кільце є ланцюговим .*

Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце, R – його радикал Джекобсона, P_1, \dots, P_s – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Нехай проективне накриття $P(P_i R)$ модуля $P_i R$ має вигляд

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^s P_j^{t_{ij}}, \quad (i, j = 1, \dots, s).$$

Співставимо модулям P_1, \dots, P_s вершини (точки) $1, \dots, s$ і з'єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерового справа напівдосконалого кільця A і позначається $Q(A)$.

Нехай A – напівдосконале кільце, для якого визначений сагайдак $Q(A)$. Визначимо сагайдак $RQ(A)$ кільця A , що пов'язаний з будовою модулів над ним [5], [6].

Нехай число вершин сагайдака $Q(A)$ дорівнює n і це вершини $1, \dots, n$, причому з вершини i у вершину j іде t_{ij} стрілок. Тоді новий сагайдак $RQ(A)$ складається з вершин $1, \dots, n$ та τ_1, \dots, τ_n , де вершини τ_1, \dots, τ_n попарно різні. Сагайдак $RQ(A)$ є дводольним графом (стрілки ідуть тільки з вершин, що лежать у множині $\{1, \dots, n\}$ у вершини, що лежать у множині $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, причому з вершини i у вершину τ_j йде t_{ij} стрілок).

Якщо в сагайдаці $RQ(A)$ опустити напрямок всіх стрілок, то одержимо неорієнтований граф, який позначимо $\overline{RQ(A)}$.

Теорема 3. [7]. Наступні умови рівносильні для напівдосконалого кільця A , квадрат радикала Джекобсона якого дорівнює нулю:

- (а) A – кільце дистрибутивно модульного типу ;
- (б) A – бірядне і $\overline{RQ(A)}$ є незв'язним об'єднанням неорієнтованих ланцюгів.

Слідуючи роботі [8] *мінором n -го порядку* кільця A називаємо кільце B ендоморфізмів скінченородженого проективного A -модуля, який може бути розкладений в пряму суму n нерозкладних модулів. З теореми 1 випливає наступне твердження.

Твердження 2. *Будь-який мінор нетерового напівдосконалого кільця дистрибутивно модульного типу є нетеровим напівдосконалим кільцем дистрибутивно модульного типу .*

Згідно твердження 1 локальне дистрибутивно модульного типу кільце є ланцюговим.

Наслідок 2 [9]. *Нетерове ланцюгове кільце A є дискретно нормованим кільцем (можливо некомутативним) або однорядним кільцем Кете, тобто ланцюговим артиновим кільцем.*

Ми опишемо зведені мінори другого і третього порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу. Розглянемо список всіх можливих, з точністю до ізоморфізму, сагайдаків Q з двома чи трьома точками таких, що задовольняють умову теореми 3. Такі сагайдаки називатимемо *допустимими*.

Твердження 3. *Допустимий сагайдак Q для $n=2$ визначається, з точністю до ізоморфізму, наступними матрицями.*

$$\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \zeta) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Описуючи зведені мінори другого порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу ми використовуватимемо позначення : $I=e_1+e_2$ – розкладом $I \in B$ в суму двох локальних ідемпотентів , $B_i=e_i B_i e_i$, R_i – радикал Джекобсона кільця B_i ($i=1,2$) R – радикал Джекобсона кільця B ,

$$X=e_1 B e_2, Y=e_2 B e_1, R=\begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}, \text{ так як } B\text{-нетерове, то } XR_2=R_1X, YR_1=R_2Y.$$

Твердження 4. *Наступний список містить всі зведені мінори другого порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу B . Навпаки, всі кільця з приведеного списку є нетеровими напівдосконалими кільцями дистрибутивно модульного типу.*

(1) $B=T_2(D)$, кільце верхніх трикутних матриць другого порядку над тілом D .

$$(2) \quad B=\begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \text{ де } B_2=D - \text{тіло, } B_1 \text{ є або дискретно нормованим}$$

кільцем або однорядним кільцем Кете, $R_1X=XR_2=0$, X є одновимірним правим D -простором та одновимірним лівим B_1/R_1 -простором.

$$(3) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \text{ де } B_1 = D - \text{тіло, } B_2 \text{ або дискретно нормовані кільце}$$

або однорядне кільце Кете, $R_1 X = X R_2 = 0$, X -одновимірний правий B_2/R_2 -простір та одновимірний лівий D -простір.

$$(4) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \text{ де } B_1 \text{ та } B_2 \text{ або дискретно нормовані кільця або}$$

однорядні кільця Кете, $R_1 X = X R_2 = 0$, X – одновимірний правий B_2/R_2 -простір та одновимірний лівий B_1/R_1 -простір.

(5) B – ланцюгове кільце. В неартиновому випадку

$$B = H_2(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{g} & \mathfrak{g} \\ \mu & \mathfrak{g} \end{pmatrix}, \text{ де } \mathfrak{g} \text{ -дискретно нормоване кільце, } \mu \text{ його єдиний}$$

максимальний ідеал.

$$(6) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ Y & B_2 \end{pmatrix}, \text{ де } B_1 \text{ та } B_2 \text{ дискретно нормовані кільця чи}$$

однорядні кільця Кете; $YX = R_2$, $R_1 X = X R_2$, $Y R_1 = R_2 Y$, $R_2^2 = 0$; X – одновимірний правий B_1/R_1 -простір та одновимірний лівий B_2/R_2 -простір.

Д о в е д е н н я .

За теоремою Моріти досить розглянути зведені мінори. Таким чином за теоремою 3 отримаємо, з точністю до ізоморфізму, шість сагайдаків мінорів другого порядку нетерових напівдосконалих напівдистрибутивних кілець дистрибутивно модульного типу з матрицями суміжності вершин:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Їм відповідає кільце B , двосторонній пірсовський розклад якого

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ Y & B_2 \end{pmatrix}, \text{ де так як } B \text{ – напівдистрибутивне, } X \text{ – ланцюговий правий } B_2\text{-}$$

модуль та ланцюговий лівий B_I -модуль, а кільця B_1 та B_2 є або дискретно нормованими кільцями або однорядними кільцями Кете.

Радикал Джекобсона кільця B має вигляд:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} R_1^2 + XY & R_1X + XR_2 \\ YR_1 + R_2Y & R_2^2 + YX \end{pmatrix}, \quad \text{де } R_1 \text{ та } R_2 - \text{радикали}$$

Джекобсона кілець B_1 та B_2 .

Кільця з матрицями суміжності 1) та 2), яким відповідають сагайдаки $Q(B) : \{ \bullet \longrightarrow \bullet \} \{ \bullet \rightleftarrows \bullet \}$ є напівланцюговими, так як з кожної точки цих сагайдаків виходить не більше однієї стрілки і в кожную точку входить не більше однієї стрілки. Кільце з матрицею суміжності 3) має сагайдак $Q(B) = \{ \bullet \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \bullet \}$. Так як з точки 2 не виходить стрілка, то нерозкладний проективний модуль $P_2 = (Y_1 \ R_2)$, що відповідає цій точці, простий. Тому $Y=0$, $R_1X=XR_2$ та $R_2=0$, тобто $B_2 = D$ –тіло. Так як B -нетерове, то за наслідком 1.7 [18] $R_1X=XR_2=0$.

$$4) Q(B) = \{ \bullet \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \bullet \}. \text{ Модуль } Q_1 = \begin{pmatrix} R_1 \\ X \end{pmatrix} - \text{простий, отже } Y=0 \text{ та } R_1=0,$$

$$B_1=D \text{ та } XR_2=R_1X=0.$$

5) $Q(B) = \{ \bullet \rightleftarrows \bullet \}$. Так як в точці 1 є петля, а в точці 2 немає петлі, маємо $R_1^2 \supseteq XY$, $R_2=YX$. Як і раніше $R_1X=XR_2$ та $YR_1=R_2Y$. Розглянемо випадки

а) $XY=0$, маємо $XYX=XR_2=0=R_1X$, $YXY=R_2Y=0=YR_1$;

б) $XY \neq 0$, тоді $XY=R_1^n (n \geq 2)$, $XYX=XR_2=R^nX=XR_2^n$.

Тому $XR_2=0=R_1X$. Аналогічно $YXY=R_2Y=YR_1=YR_1^n$ та $YR_1=0=R_2Y$.

Отже, в кільці B з сагайдаком 5) $R_1X=XR_2=0$ та $YR_1=R_2Y=0$.

6) $Q(B) = \{ \bullet \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \bullet \}$. Так як в $Q(B)$ є обидві петлі, то $R_1 \neq 0$ та $R_2 \neq 0$. B -кільце дистрибутивно модульного типу, тому скінчено зображуваний B -модуль напівдистрибутивний. Обчислення скінчено зображуваних модулів еквівалентне зведенню блочних матриць. Нехай $R_2^2 \neq 0$.

Розглянемо фрагмент
$$\begin{pmatrix} R_1 & & X & X \\ & R_1^2 & X & X \\ & & 0 & r_1 x E & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & R_2 \end{pmatrix},$$
 він приводить до тріади

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, причому B -модулі, побудовані за цією матрицею нерозкладні та

недистрибутивні, чого не може бути для кільця дистрибутивно модульного типу. Тому $R_1^2 = 0$. Антисиметрично $R_2^2 = 0$. В цьому випадку кутова матриця зводиться до номіального вигляду. Отже, кільце B з сагайдаком вигляду 6) – артинове кільце дистрибутивно модульного типу.

Розглянемо зведені мінори третього порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу.

Твердження 4. Допустимий сагайдак Q для $n=3$ визначається, з точністю до ізоморфізму, наступними матрицями:

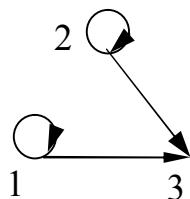
$$\begin{aligned} & 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & 10) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 12) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 13) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & 15) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 16) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 17) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 18) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 19) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &20) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 21) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 22) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 23) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 24) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &25) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 26) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 27) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 28) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 29) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &30) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 31) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 32) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

За твердженням 4 будемо мати, з точністю до ізоморфізму, 32 допустимих сагайдаки, а отже і 32 мінори третього порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу з умовами, які накладаються на їх компоненти:

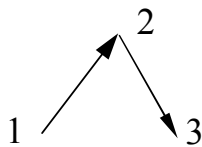
$$\begin{aligned}
 1. & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 1 \longrightarrow 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} D & D & D \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}. \\
 2. & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft 2 \\ \nearrow \\ 1 \longrightarrow 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} D & A_{12} & D \\ 0 & \mathfrak{g}_2 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}. \\
 3. & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft 2 \\ \nearrow \\ 1 \longrightarrow \circlearrowleft 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{g}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{g}_3 \end{pmatrix}. \\
 4. & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2 \searrow \\ 1 \longrightarrow 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} D & 0 & D \\ 0 & D & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}. \\
 5. & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2 \searrow \\ \circlearrowleft 1 \longrightarrow 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_1 & 0 & A_{13} \\ 0 & D & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



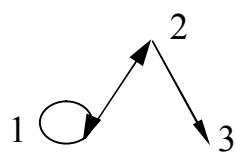
$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & 0 & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



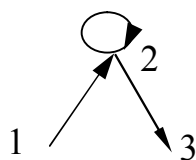
$$\begin{pmatrix} D & D & D \\ 0 & D & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{pmatrix} D & D & 0 \\ 0 & D & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}.$$

$$8. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



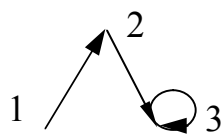
$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & D_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



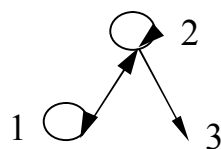
$$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

$$10. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



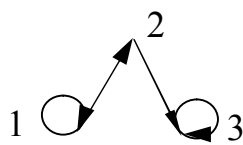
$$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & D_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

$$11. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



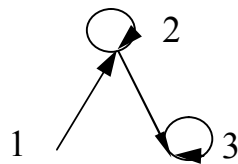
$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



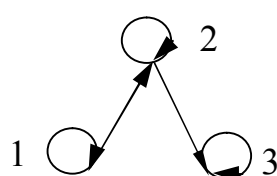
$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & D_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

$$13. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

$$14. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

$$15. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \nearrow & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & D_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{12}A_{23} = 0.$$

$$16. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \nearrow & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{D}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_1 = A_{12}A_{21}$;

2). $R_2 = A_{21}A_{12}$; 3). $A_{23} = A_{21}A_{13}$; 4). $R_2 = 0$, або $A_{23} = 0$.

$$17. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \nearrow & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{D}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_2 = A_{21}A_{12}$;

2). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 3). $A_{12}A_{21} = 0$, або $A_{13} = 0$.

$$18. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \nearrow & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{D}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \mathfrak{D}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_1 = A_{12}A_{21}$;

2). $R_2 = A_{21}A_{12}$; 3). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 4). $R_1 = 0$, або $A_{13} = 0$.

$$19. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \nearrow & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{D}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \mathfrak{D}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_2 = A_{21}A_{12}$;

2). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 3). $A_{12}A_{21} = 0$, або $A_{13} = 0$.

$$20. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \nearrow & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{D}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_1 = A_{12}A_{21}$;

2). $R_2 = A_{21}A_{12}$; 3). $A_{12}A_{23} = 0$; 4). $A_{21}A_{13} = 0$.

$$21. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad \quad 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_2 = A_{23}A_{32}$;

2). $R_3 = A_{32}A_{23}$; 3). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 4). $R_3 = 0$, або $A_{13} = 0$.

$$22. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad \quad 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_2 = A_{23}A_{32}$;

2). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 3). $A_{32}A_{21} = 0$, або $A_{13} = 0$.

$$23. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad \quad 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_2 = A_{23}A_{32}$;

2). $R_3 = A_{32}A_{23}$; 3). $A_{12} = A_{13}A_{32}$; 4). $R_2 = 0$, або $A_{12} = 0$.

$$24. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad \quad 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_2 = A_{23}A_{32}$;

2). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 3). $A_{32}A_{23} = 0$, або $A_{13} = 0$.

$$25. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad \quad 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_2 = A_{23}A_{32}$; 2). $R_3 = A_{32}A_{23}$; 3). $A_{13}A_{32} = 0$; 4). $A_{12}A_{23} = 0$.

$$26. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \nearrow & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

- 1). $R_1 = A_{12}A_{21} = A_{13}A_{31}$; 2). $R_2 = A_{21}A_{12} = A_{23}A_{32}$; 3). $R_3 = A_{31}A_{13} = A_{32}A_{23}$;
4). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 5). $A_{21} = A_{23}A_{31}$; 6). $A_{32} = A_{31}A_{12}$;

$$27. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \curvearrowright & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

- 1). $R_1 = A_{12}A_{21}$; 2). $R_2 = A_{21}A_{12}$; 3). $R_3 = A_{31}A_{13} = A_{32}A_{23}$; 4). $A_{13} = A_{12}A_{23}$;
5). $A_{32} = A_{31}A_{12}$; 6). $A_{13} = 0$, або $R_1 = A_{23}A_{31} = 0$; 7). $A_{32} = 0$, або $R_2 = A_{23}A_{31} = 0$.

$$28. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \circlearrowleft & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

- 1). $R_2 = A_{21}A_{12} = A_{23}A_{32}$; 2). $R_3 = A_{31}A_{13} = A_{32}A_{23}$; 3). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 4). $A_{21} = A_{23}A_{31}$; 5).
 $A_{32} = A_{31}A_{12}$; 6). $A_{12}R_2 = 0$; 7). $A_{13}R_3 = 0$; 8). $A_{21}R_1 = 0$; 9). $A_{31}R_1 = 0$.

$$29. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \circlearrowleft & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

- 1). $R_2 = A_{21}A_{12} = A_{23}A_{32}$; 2). $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 3). $A_{21} = A_{23}A_{31}$; 4). $A_{32} = A_{31}A_{12}$;
5). $A_{12}R_2 = 0$; 6). $A_{13}R_3 = 0$; 7). $A_{21}R_1 = 0$; 8). $A_{23}R_3 = 0$; 9). $A_{32}R_2 = 0$.

$$30. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \curvearrowright & \searrow \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

- 1). $R_1 = A_{13}A_{31}$; 2). $R_2 = A_{23}A_{32}$; 3). $R_3 = A_{31}A_{13}$, або $R_3 = A_{32}A_{23}$; 4). $A_{12} = A_{13}A_{32}$;
5). $A_{21} = A_{23}A_{31}$; 6). $R_1 = R_2 = 0$, або $A_{12} = A_{21} = 0$.

$$31. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \nearrow & \searrow \\ 1 & & 3 \\ & \nwarrow & \nearrow \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_1 = A_{13}A_{31}$; 2). $R_2 = A_{23}A_{32}$; 3). $R_3 = A_{31}A_{13}$, або $R_3 = A_{32}A_{23}$;

4). $A_{21} = A_{23}A_{31}$;

6). $A_{12}R_2 = A_{13}A_{32} = A_{31}A_{12} = A_{12}A_{23} = 0$. 7). $R_1 = R_2 = 0$, або $A_{21} = 0$.

$$32. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \circ & \searrow \\ & \nearrow & \searrow \\ 1 & & 3 \\ & \nwarrow & \nearrow \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1). $R_1 = A_{13}A_{31}$; 2). $R_3 = A_{31}A_{13}$, або $R_3 = A_{32}A_{23}$; 3). $A_{12} = A_{13}A_{32}$;

4). $A_{21} = A_{23}A_{31}$;

6). $R_1 = A_{23}A_{32} = 0$, або $A_{12} = A_{21} = 0$.

Для доведення розглянемо, наприклад, мінор з сагайдаком 16. Він має

вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}.$$

Але так як у вершинах 1 і 2 цього сагайдака немає петель, то $R_1 = A_{12}A_{21}$ і $R_2 = A_{21}A_{12}$. Із вершини 3 не виходить стрілка, тому модуль $P_3 = (A_{31} A_{32} \mathfrak{G}_3)$ – простий, а значить $A_{31} = 0$, $A_{32} = 0$, $R_3 = 0$ і $\mathfrak{G}_3 = D_3$ – тіло. Кожній стрілці σ_{ij} відповідає гомоморфізм $\varphi_{ij}: P_j \rightarrow P_i$, тобто підмодуль $\text{Im } \varphi_{ij}$, який має рівно один максимальний підмодуль і $\text{Im } \varphi_{ij} / (\text{Im } \varphi_{ij})R = U_i$. Розглянемо модуль $P_2 = (A_{21} \ \mathfrak{G}_2 \ A_{23})$, $P_2R = (A_{21}R_2 \ A_{23})$, $P_2R^2 = (A_{21}R_1R_2 \ A_{23})$, $P_2R^3 = (A_{21}R_1^2 \ R_2^2 \ A_{23}R_3)$. Якщо $R_2 \neq 0$ і $A_{23} \neq 0$, то $P_2R^2/P_2R^3 = U_2 + U_3$, що суперечить попередньому. Отже, $R_2 = 0$, або $A_{23} = 0$. Отримали мінор

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix},$$

де $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, за наслідком 2, дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, A_{12} – одновимірний лівий \mathfrak{A}_1/R_1 – простір і одновимірний правий \mathfrak{A}_2/R_2 – простір, A_{21} – одновимірний лівий \mathfrak{A}_2/R_2 – простір і одновимірний правий \mathfrak{A}_1/R_1 – простір, A_{13} – одновимірний лівий \mathfrak{A}_1/R_1 – простір і одновимірний правий D_3 – простір, A_{23} – одновимірний лівий \mathfrak{A}_2/R_2 – простір і одновимірний правий D_3 – простір.

ПОСИЛАННЯ

- [1] Bass H.(1960). Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **95**, 466-488.
- [2] Auslander M. (1971). Representation dimension of artin algebras . *Quinn Mary College Math. Notes*.
- [3] Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. (1988). Бирядные кольца и модули над ними. *Алгебраические структуры и их применение*. – К.: УМК ВО, 43-74.
- [4] Данлыев Х.М., Кириченко В.В., Халецкая З.П., Яременко Ю.В.(1995). Слабопервичные полусовершенные 2-кольца и модули над ними. *Сб. „Алгебраические исследования”*. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 5-32.
- [5] Gabriel P.(1972). Unzerlegbare Darstellungen I . *Manuscripta Math.* № **6**, 71-103.
- [6] Кругляк С.А.(1972). Представления алгебр, квадрат радикала которых равен нулю. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР*. **28**, 60-68.
- [7] Yaremenko Yu.V.(1997). Noetherian semiperfekt rings of distributive module type. *Mathematychni Studii*. **8**, №1, 3-10.
- [8] Drozd Yu. A.(1971). Minors and reduction theorems .*Coll Math. Soc. J. Bolyai*. **6**, 173-176.
- [9] Кириченко В.В. (1976). Обобщенно однорядные кольца . *Мат. сб.* **99**, № 4, 559-581.